19/05/2015 φυλλάδιο #10 (στο ίντερνετ)

Άσκηση 2.

α) Έστω $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ συμμετρικός. Υποθ. ότι $m>0$ με $A^m=\mathbb{O}_{n\times n}$. Δείξτε ότι $A=\mathbb{O}_{n\times n}$. β) Βρείτε συμμετρικό $B\in\mathbb{C}^{2\times 2}$ συμμετρικό με $B\neq\mathbb{O}_{2\times 2}$ αλλά $B^2=\mathbb{O}_{2\times 2}$

Λύση

α) Θέτουμε $\phi(x)=x^m$, $x\in\mathbb{R}[x]$. Έχουμε $\phi(A)=\mathbb{O}_{n\times n}$. Επομένως το ελάχιστο πολυώνυμο $m_A(x)$ διαιρεί το x^m στο $\mathbb{R}[x]$. Άρα υπάρχει $k\in\mathbb{Z}$ με $1\le k\le m$ ώστε $m_A(x)=x^k$. Από θεωρία A συμμετρικός πραγματικός $\Rightarrow$ A διαγωνίσιμος. Άρα το $m_A(x)$ είναι γινόμενο διακεκριμένων πρωτοβαθμίων. Συνεπώς $m_A(x)=x \Rightarrow \mathbb{O}=A=m_A(A)$

Έστω $B=\begin{bmatrix}1 & i\\ i & -1\end{bmatrix}$. Εύκολα βλέπουμε ότι $B^2=\begin{bmatrix}1 & i\\ i & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & i\\ i & -1\end{bmatrix}=$

$=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$ Αλλά $B\neq\mathbb{O}_{2\times 2}$.

[redacted]

Άσκηση 15

Να εξετάσετε αν ο συμμετρικός πίνακας $B=\begin{bmatrix}4 & 2 & 4\\ 2 & 1 & 2\\ 4 & 2 & 4\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^{3\times 3}$ είναι θετικά ορισμένος ή αρνητικά ορισμένος.

Λύση

(* Οι γραμμοπράξεις δεν σέβονται τους συμμετρικούς πίνακες)

Θέτουμε $\Delta_1=|4|=4$ $\Delta_2=\begin{vmatrix}4 & 2\\ 2 & 1\end{vmatrix}$ $\Delta_3=\det B$

Από θεωρία B θετικά ορισμένος $\Leftrightarrow$ $\Delta_1>0$, $\Delta_2>0$ και $\Delta_3>0$

— // — αρνητικά — // — $\Leftrightarrow$ $\Delta_1<0$, $\Delta_2>0$ και $\Delta_3<0$

$\Delta_2=\begin{vmatrix}4 & 2\\ 2 & 1\end{vmatrix}=0$. Επομένως, ο B δεν είναι ούτε θετικά ούτε αρνητικά ορισμένος.

[redacted]

Άσκηση (εκτός φυλλαδίου)

Θεωρούμε τον $\mathbb{C}^{n\times 1}$ με το κανονικό μιγαδικό ερμιτιανό γινόμενο

$$\left\langle \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} \right\rangle := z_1\overline{w_1} + \dots + z_n\overline{w_n}$$

Έστω $P \in \mathbb{C}^{n\times n}$ μοναδιαίος (δηλ. P αντιστρέψιμος και $P^{-1} = (\overline{P})^t$. Τότε

(i) Αν $\lambda \in \mathbb{C}$ ιδιοτιμή του P, έχουμε $|\lambda| = 1$ (δηλ. $\lambda\overline{\lambda} = 1$)

(ii) Έστω $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ ιδιοτιμές του P με $\lambda \neq \mu$. Τότε οι υπόχωροι $V_P(\lambda)$ και $V_P(\mu)$ του $\mathbb{C}^{n\times 1}$ είναι ορθογώνιοι

(iii) Για υπόχωρο $W \in \mathbb{C}^{n\times 1}$ ορίζουμε $W^{\perp} = \{ Y \in \mathbb{C}^{n\times 1} : \langle X, Y \rangle = 0 \}$ για κάθε $X \in W$.

Έστω $X_0 \in \mathbb{C}^{n\times 1}$ ιδιοδιάνυσμα του P. Θέτουμε $W := \langle X_0 \rangle$ ο 1-διάστατος υπόχωρος του $\mathbb{C}^{n\times 1}$ που παράγεται απ' το X_0

Δείξτε ότι $PY \in W^{\perp}$ για κάθε $Y \in W^{\perp}$

Απόδειξη

(i) Ξέρουμε ότι για $X, Y \in \mathbb{C}^{n\times 1}$ $\langle X, Y \rangle = Tr(\overline{Y}^t X) \in \mathbb{C}$

Αφού λ ιδιοτιμή του P υπάρχει $0_{n\times 1} \neq X \in V_P(\lambda)$. Άρα $P \cdot X = \lambda X \Rightarrow$
$\overline{(PX)} = \overline{(\lambda X)} \Rightarrow \overline{P}\,\overline{X} = \overline{\lambda}\,\overline{X}$.

Έχουμε $\langle X, X \rangle = Tr(\overline{X}^t X) \overset{P \text{ μοναδιαίος}}{=} Tr(\overline{X}^t \overline{P}^t P X) = Tr((\overline{P}\,\overline{X})^t (PX)) =$
$Tr(\overline{\lambda}\,\overline{X}^t \lambda X) = \lambda\overline{\lambda}\, Tr(\overline{X}^t X) = \lambda\overline{\lambda} \langle X, X \rangle$.

Άρα $(1 - \lambda\overline{\lambda}) \langle X, X \rangle = 0_{\mathbb{C}}$ και αφού $0_{n\times 1} \neq X \Rightarrow \langle X, X \rangle > 0$
έπεται $1 - \lambda\overline{\lambda} = 0 \Rightarrow |\lambda| = 1$

(ii) Υποθ. ότι $X \in V_P(\lambda)$, $Y \in V_P(\mu)$ με $\lambda \neq \mu$. Θα δείξουμε ότι
$\langle X, Y \rangle = 0$. Από υπόθεση $PX = \lambda X$ $PY = \mu Y \Rightarrow \overline{(PY)} = \overline{(\mu Y)} \Rightarrow$
$\overline{P}\,\overline{Y} = \overline{\mu}\,\overline{Y}$ (1). Από το (i) $\lambda\overline{\lambda} = 1 \Rightarrow \lambda^{-1} = \overline{\lambda}$. Αφού $\mu \neq \lambda$ έχουμε
$\overline{\mu} \neq \overline{\lambda}$. Άρα $\overline{\mu} \neq \lambda^{-1}$ (2). Ξανακάνουμε την ίδια μέθοδο.

Έχουμε $\langle X, Y \rangle = Tr(\overline{Y}^t Y) = Tr(\overline{Y}^t \overline{P}^t P X) = Tr((\overline{P}\,\overline{Y})^t (PX)) =$
$Tr(\overline{\mu}\,\overline{Y}^t \lambda X) = \lambda\overline{\mu} \cdot Tr(\overline{Y}^t X) = \lambda\overline{\mu} \langle X, Y \rangle$. Άρα $(1 - \lambda\overline{\mu}) \langle X, Y \rangle = 0$

Από (2) $1 - \lambda\overline{\mu} \neq 0_{\mathbb{C}}$. Άρα $\langle X, Y \rangle = 0$

(iii) Έστω $X \in W = \langle X_0 \rangle$ και $Y \in W^{\perp}$. Θα δείξουμε ότι $\langle X, PY \rangle = 0$.

Αφού $X \in \langle X_0 \rangle$ υπάρχει $\nu \in \mathbb{C}$ με $X = \nu X_0$. Άρα αφού $P \cdot X_0 = \lambda X_0 \Rightarrow$
$PX = P(\nu X_0) = \nu(P X_0) = \nu \lambda X_0 = \lambda X$. Άρα $PX = \lambda X \Rightarrow P^{-1}(PX) = P^{-1}(\lambda X)$
$\Rightarrow \lambda(P^{-1} X) = X$ (3). Αλλά ιδιοτιμή του P κ' P αναστρέψιμος $\Rightarrow \lambda = 0$.
Άρα (3) $\Rightarrow P^{-1} X = \lambda^{-1} X$ (4). Έχουμε $\langle X, PY \rangle = Tr((\overline{PY})^t X) =$
$Tr(\bar{P}\bar{Y})^t (X) = Tr(\bar{Y}^t P^{-1} X) \overset{(4)}{=} Tr(\bar{X}^t \cdot \lambda^{-1} X) = \lambda^{-1}(Tr(\cancel{\bar{Y}}^t X) =$
$\lambda^{-1} \langle X, Y \rangle = 0_{\mathbb{C}}$ γιατί $X \in W$, $Y \in W^{\perp}$. Άρα $\langle X, PY \rangle = 0$ για κάθε
$X \in W \Rightarrow PY \in W^{\perp}$.

Έχουμε απ' τον ορισμό $\langle X, Y \rangle = x_1 \bar{y}_1 + \dots x_n \bar{y}_n$
Επίσης, $\bar{Y} = \begin{pmatrix} \bar{y}_1 \\ \vdots \\ \bar{y}_n \end{pmatrix} \Rightarrow \bar{Y}^t = (\bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_n)$. Άρα $\bar{Y}^t \cdot X = (\bar{y}_1 \dots \bar{y}_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} =$

$(\bar{y}_1 x_1 + \dots + \bar{y}_n x_n)$ Άρα $Tr(\bar{Y}^t X) = \bar{y}_1 x_1 + \dots + \bar{y}_n x_n =$
$= x_1 \bar{y}_1 + \dots + x_n \bar{y}_n = \langle X, Y \rangle$